경희대학교

2024학년도 신입생 수시모집

논술고사 문제지(자연계)

[11월 19일(일) 오전]

지원학부(과) (   )　수험번호 | | | | | | | | | | |　성 명 (   )

<유의사항 : 아래 내용 위반시 감점 또는 0점 처리할 수 있음>

1. 답안의 작성과 정정은 반드시 본교에서 지급한 흑색 필기구를 사용하시오.
2. 답안지에 제목을 쓰지 말고, 특별한 표시를 하지 마시오.
3. 답안지에 답안과 관련된 내용 이외에 어떤 것도 쓰지 마시오(예: 감사합니다 등).
4. 답안 작성 시 논제번호(예: Ⅰ, Ⅱ…)에 맞춰 답안을 작성하며, 논제별 소문제번호[예: (1), (2)…]를 쓰고 이어서 논술하시오.
5. 답안 정정 시에는 두 줄을 긋고 작성하며, 수정도구(수정액 또는 수정테이프) 사용은 절대 불가하므로 유의하시오.
6. 띄어쓰기를 포함하여 논제별 분량 제한을 준수하고, 답안지는 모든 논제를 포함하여 반드시 최종 1장만 제출 가능하오니 각별히 유의하시오.
7. 지정된 답안의 작성 영역을 벗어나지 않도록 각별히 유의하시오.
8. **자연계 문제지는 총 2장 3쪽입니다.**

다음 제시문을 읽고 논제에 답하시오. (100점)

[가] 두 직선 $l : y = mx + n$, $l' : y = m'x + n'$에 대하여 l과 l'이 서로 수직이면 $mm' = -1$이다. 거꾸로 $mm' = -1$이면 l과 l'이 서로 수직이다.

[나] 첫째항이 $a\,(a \neq 0)$이고 공비가 r인 등비급수 $\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1}$은 $|r| < 1$일 때, 수렴하고 그 합은 $\frac{a}{1-r}$이다.

[다] 서로 다른 n개에서 $r\,(0 < r \leq n)$개를 택하는 조합의 수는

$$_{n}\mathrm{C}_{r} = \frac{_{n}\mathrm{P}_{r}}{r!} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

[라] 서로 다른 n개에서 r개를 택하는 중복조합의 수는

$$_{n}\mathrm{H}_{r} = {}_{n+r-1}\mathrm{C}_{r}$$

[마] 좌표공간의 두 점 $\mathrm{A}(x_1, y_1, z_1)$, $\mathrm{B}(x_2, y_2, z_2)$에 대하여 선분 AB를 $m : n\,(m > 0,\ n > 0)$으로 내분하는 점 P의 좌표는

$$\left(\frac{mx_2 + nx_1}{m+n},\ \frac{my_2 + ny_1}{m+n},\ \frac{mz_2 + nz_1}{m+n}\right)$$

[바] 평면 β 위의 도형의 넓이를 S, 이 도형의 평면 α 위로의 정사영의 넓이를 S'이라고 할 때, 두 평면 α, β가 이루는 각의 크기를 $\theta\,(0° \leq \theta \leq 90°)$라고 하면

$$S' = S\cos\theta$$

<뒷면에 계속>

[논제 Ⅰ] 좌표평면 위의 원점 $\mathrm{O}(0,\ 0)$과 두 점 $\mathrm{P}_1(8,\ 0)$, $\mathrm{Q}_1(0,\ 4)$에 대하여 다음 물음에 답하시오.

(1) 선분 $\mathrm{P}_1\mathrm{Q}_1$의 수직이등분선이 쌍곡선 $x^2-y^2=b$와 접한다고 한다. 이때 b의 값을 구하고, 그 근거를 논술하시오. (12점)

(2) 두 점 P_1, Q_1에 대하여 직각삼각형 $\mathrm{OP}_1\mathrm{Q}_1$을 만든다. 선분 $\mathrm{P}_1\mathrm{Q}_1$의 수직이등분선이 x축, y축과 만나는 두 점을 각각 P_2, Q_2라 하고 직각삼각형 $\mathrm{OP}_2\mathrm{Q}_2$를 만든다. 선분 $\mathrm{P}_2\mathrm{Q}_2$의 수직이등분선이 x축, y축과 만나는 두 점을 각각 P_3, Q_3라 하고 직각삼각형 $\mathrm{OP}_3\mathrm{Q}_3$를 만든다. 선분 $\mathrm{P}_3\mathrm{Q}_3$의 수직이등분선이 x축, y축과 만나는 두 점을 각각 P_4, Q_4라 하고 직각삼각형 $\mathrm{OP}_4\mathrm{Q}_4$를 만든다. 이와 같은 과정을 계속하여 직각삼각형 $\mathrm{OP}_5\mathrm{Q}_5$, $\mathrm{OP}_6\mathrm{Q}_6$, $\mathrm{OP}_7\mathrm{Q}_7$, $\cdots$을 만든다. 이때, 빗변의 중점이 제1사분면에 있는 직각삼각형들의 넓이의 합을 A_1, 빗변의 중점이 제2사분면에 있는 직각삼각형들의 넓이의 합을 A_2, 빗변의 중점이 제3사분면에 있는 직각삼각형들의 넓이의 합을 A_3, 빗변의 중점이 제4사분면에 있는 직각삼각형들의 넓이의 합을 A_4라 하자. 다음 명제의 참, 거짓을 판별하고, 그 근거를 논술하시오. (18점)

명제 : A_1은 $A_2+A_3+A_4$보다 크다.

[논제 Ⅱ] 동전 한 개를 반복하여 19번 던졌을 때, 앞면이 16번, 뒷면이 3번 나왔다고 한다. 다음 물음에 답하시오.

(1) 뒷면이 연속해서 나오지 않는 경우의 수를 구하고, 그 근거를 논술하시오. (12점)

(2) 앞면은 항상 두 번 이상 연속해서 나오고 뒷면은 연속해서 나오지 않는 경우의 수를 구하고, 그 근거를 논술하시오. (21점)

<다음 면에 계속>

[논제 Ⅲ] 구 $x^2+y^2+(z-1)^2=1$ 위에 두 점 $\mathrm{A}(0,\ 0,\ 2)$, $\mathrm{P}(a,\ a,\ b)$가 있다. xy평면 위의 점 Q에 대하여 점 P가 선분 AQ를 $1:4$로 내분할 때, 다음 물음에 답하시오. (단, a, b는 양수이다.)

(1) 점 P와 점 Q의 좌표를 구하고, 그 근거를 논술하시오. (10점)

(2) 점 A와 점 P가 아닌 구 위의 점 R에 대하여 삼각형 ARQ의 xy평면 위로의 정사영을 F라 하고 삼각형 ARQ와 xy평면이 이루는 각의 크기를 θ라 하자. F의 넓이가 최대가 될 때, 삼각형 ARQ의 세 변의 길이와 $\cos\theta$의 값을 구하고, 그 근거를 논술하시오. (27점)

<끝> - 총 2장 3쪽 입니다. -

1. 일반정보

유형	■ 논술고사 □ 면접 및 구술고사 □ 선다형고사
전형명	논술우수자전형
해당 대학의 계열(과목) / 문항번호	(자연)계열 / (Ⅰ)문항

2. 2024학년도 수시모집 논술고사 문항 및 제시문

[제시문]

[가] 두 직선 $l: y = mx + n$, $l': y = m'x + n'$에 대하여 l과 l'이 서로 수직이면 $mm' = -1$이다. 거꾸로 $mm' = -1$이면 l과 l'이 서로 수직이다.

[나] 첫째항이 $a\,(a \neq 0)$이고 공비가 r인 등비급수 $\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1}$은 $|r| < 1$일 때, 수렴하고 그 합은 $\frac{a}{1-r}$이다.

[논제 Ⅰ] 좌표평면 위의 원점 $\mathrm{O}(0,\ 0)$과 두 점 $\mathrm{P}_1(8,\ 0)$, $\mathrm{Q}_1(0,\ 4)$에 대하여 다음 물음에 답하시오.

(1) 선분 $\mathrm{P}_1\mathrm{Q}_1$의 수직이등분선이 쌍곡선 $x^2 - y^2 = b$와 접한다고 한다. 이때 b의 값을 구하고, 그 근거를 논술하시오. (12점)

(2) 두 점 P_1, Q_1에 대하여 직각삼각형 $\mathrm{OP}_1\mathrm{Q}_1$을 만든다. 선분 $\mathrm{P}_1\mathrm{Q}_1$의 수직이등분선이 x축, y축과 만나는 두 점을 각각 P_2, Q_2라 하고 직각삼각형 $\mathrm{OP}_2\mathrm{Q}_2$를 만든다. 선분 $\mathrm{P}_2\mathrm{Q}_2$의 수직이등분선이 x축, y축과 만나는 두 점을 각각 P_3, Q_3라 하고 직각삼각형 $\mathrm{OP}_3\mathrm{Q}_3$를 만든다. 선분 $\mathrm{P}_3\mathrm{Q}_3$의 수직이등분선이 x축, y축과 만나는 두 점을 각각 P_4, Q_4라 하고 직각삼각형 $\mathrm{OP}_4\mathrm{Q}_4$를 만든다. 이와 같은 과정을 계속하여 직각삼각형 $\mathrm{OP}_5\mathrm{Q}_5$, $\mathrm{OP}_6\mathrm{Q}_6$, $\mathrm{OP}_7\mathrm{Q}_7$, $\cdots$을 만든다. 이때, 빗변의 중점이 제1사분면에 있는 직각삼각형들의 넓이의 합을 A_1, 빗변의 중점이 제2사분면에 있는 직각삼각형들의 넓이의 합을 A_2, 빗변의 중점이 제3사분면에 있는 직각삼각형들의 넓이의 합을 A_3, 빗변의 중점이 제4사분면에 있는 직각삼각형들의 넓이의 합을 A_4라 하자. 다음 명제의 참, 거짓을 판별하고, 그 근거를 논술하시오. (18점)

명제 : A_1은 $A_2 + A_3 + A_4$보다 크다.

3. 2024학년도 수시모집 논술고사출제 의도

[논제 Ⅰ]에서는 고등학교 교육과정의 직선의 방정식, 이차곡선, 등비급수 등을 종합적으로 잘 이해하고 응용할 수 있는지를 파악할 수 있는 논제를 출제하였다. 주어진 조건으로부터 수학적으로 추론하고 단순한 공식의 적용보다는 주어진 상황을 수학적으로 표현하여 문제해결을 위한 논리적인 방향을 제시하고 합리적으로 해결할 수 있는 능력을 갖추고 있는지를 평가하고자 하였다.

4. 2024학년도 수시모집 논술고사문항 해설

[논제 Ⅰ]에서는 이차곡선의 접선, 등비급수 등을 이용하여 제시된 문제를 해결할 수 있는 능력을 평가하고자 하였다. 주어진 직선과 곡선이 언제 서로 접하게 되는지 추론하도록 하고, 등비급수를 활용하여 주어진 문제를 해결하도록 하였다.

5. 2024학년도 수시모집 논술고사채점 기준

하위문항	채점 기준	배점
(1)	<6점> 선분의 중점, 기울기 등을 활용하여 수직이등분선을 이해한다. <6점> b의 값을 구한다.	12점
(2)	<8점> 연속하여 만들어지는 직각삼각형들이 닮았음을 확인한다. <10점> A_1, A_2, A_3, A_4 등을 이용하여, 주어진 명제의 참, 거짓을 판별한다.	18점

6. 2024학년도 수시모집 논술고사 예시답안

(1) 선분 $\mathrm{P_1Q_1}$의 수직이등분선을 m이라 하자. 선분 $\mathrm{P_1Q_1}$의 중점의 좌표는 $(4,\ 2)$이고 직선 $\mathrm{P_1Q_1}$의 기울기가 $-\frac{1}{2}$이므로 m의 기울기는 2이다. 따라서 직선 m의 방정식은 $y=2x-6$이다. 한편 쌍곡선 $x^2-y^2=b$와 직선 m이 접하려면 이차방정식 $x^2-(2x-6)^2=b$, 즉 $3x^2-24x+36+b=0$의 판별식이 0이어야 한다.
따라서 $\frac{D}{4}=12^2-3\times(36+b)=0$이므로 $b=12$이다.

(2) P_n과 Q_n을 지나는 직선을 l_n이라 하자. 직선 l_2는 (1)에서 구한 직선 m이고 x축과 $\mathrm{P_2}(3,\ 0)$, y축과 $\mathrm{Q_2}(0,\ -6)$에서 만난다. 직선 l_3는 선분 $\mathrm{P_2Q_2}$의 수직이등분선이므로 점 $\left(\frac{3}{2},\ -3\right)$을 지나고 기울기는 $-\frac{1}{2}$이다. 따라서 직선 l_3의 방정식은 $y=-\frac{1}{2}x-\frac{9}{4}$이고 x축과 $\mathrm{P_3}\left(-\frac{9}{2},\ 0\right)$, y축과 $\mathrm{Q_3}\left(0,\ -\frac{9}{4}\right)$에서 만난다.

이제 직각삼각형 $\mathrm{OP}_n\mathrm{Q}_n$의 넓이를 S_n이라 하면 $S_1=16$, $S_2=9$, $S_3=\frac{81}{16}$이다. 직각삼각형 $\mathrm{OP}_n\mathrm{Q}_n$들은 모두 서로 닮음이고, 연속하여 만들어지는 직각삼각형의 닮음비는 $\frac{3}{4}$이므로 넓이의 비는 $\left(\frac{3}{4}\right)^2=\frac{9}{16}$이다. 따라서 S_4는 $\frac{729}{256}$이다. A_1은 첫째항이 $S_1=16$이고 공비가 $\left(\frac{9}{16}\right)^4$인 등비급수의 합이다. 마찬가지로 A_4는 첫째항이 $S_2=9$이고 공비가 $\left(\frac{9}{16}\right)^4$인 등비급수의 합, A_3은 첫째항이 $S_3=\frac{81}{16}$이고 공비가 $\left(\frac{9}{16}\right)^4$인 등비급수의 합, A_2은 첫째항이 $S_4=\frac{729}{256}$이고 공비가 $\left(\frac{9}{16}\right)^4$인 등비급수의 합이다. 따라서 A_1과 $A_2+A_3+A_4$의 대소 관계를 비교하기 위해, S_1과 $S_2+S_3+S_4$의 대소 관계를 비교하면,

$$S_1=16<9+\frac{81}{16}+\frac{729}{256}=S_2+S_3+S_4$$

따라서 $A_1<A_2+A_3+A_4$이고 주어진 명제는 거짓이다.

1. 일반정보

유형	■ 논술고사 □ 면접 및 구술고사 □ 선다형고사
전형명	논술우수자전형
해당 대학의 계열(과목) / 문항번호	(자연)계열 / (Ⅱ)문항

2. 2024학년도 수시모집 논술고사 문항 및 제시문

[제시문]

[다] 서로 다른 n개에서 $r\,(0 < r \le n)$개를 택하는 조합의 수는

$$ {}_{n}\mathrm{C}_{r} = \frac{{}_{n}\mathrm{P}_{r}}{r!} = \frac{n!}{r!(n-r)!} $$

[라] 서로 다른 n개에서 r개를 택하는 중복조합의 수는

$$ {}_{n}\mathrm{H}_{r} = {}_{n+r-1}\mathrm{C}_{r} $$

[논제 Ⅱ] 동전 한 개를 반복하여 19번 던졌을 때, 앞면이 16번, 뒷면이 3번 나왔다고 한다. 다음 물음에 답하시오.

(1) 뒷면이 연속해서 나오지 않는 경우의 수를 구하고, 그 근거를 논술하시오. (12점)

(2) 앞면은 항상 두 번 이상 연속해서 나오고 뒷면은 연속해서 나오지 않는 경우의 수를 구하고, 그 근거를 논술하시오. (21점)

3. 2024학년도 수시모집 논술고사출제 의도

자연계 [논제 Ⅱ]에서는 고등학교 수학 교육과정 수학 및 확률과 통계 영역에서 경우의 수, 순열, 조합, 중복조합 등의 중요한 개념을 잘 이해하여 종합적으로 문제에 적용할 수 있는지를 평가 할 수 있는 논제를 출제하였다. 주어진 상황에서 수학의 이론과 개념을 활용하여 문제 해결 방법을 수립하고 최적의 해결 전략을 고려할 수 있는지를 평가하고자 하였다. 또한, 주어진 조건으로부터 수학적으로 추론하고 단순한 공식의 적용보다는 주어진 상황을 수학적으로 표현하여 문제해결을 위한 논리적인 방향을 제시하고 합리적으로 해결할 수 있는 능력을 갖추고 있는지를 평가하고자 하였다.

4. 2024학년도 수시모집 논술고사문항 해설

[논제 Ⅱ]에서는 경우의 수, 순열, 조합, 중복조합 등의 개념을 이해하고 주어진 상황에서의 확률을 계산할 수 있는지를 평가하고자 하였다.

5. 2024학년도 수시모집 논술고사채점 기준

하위문항	채점 기준	배점
(1)	<4점> 뒷면이 연속해서 나오지 않는 상황을 설명한다. <8점> 뒷면이 연속해서 나오지 않는 경우의 수를 구한다.	12점
(2)	<6점> 앞면은 항상 두 번 이상 연속해서 나오고 뒷면은 연속해서 나오지 않는 경우를 설명한다. <15점> 앞면은 항상 두 번 이상 연속해서 나오고 뒷면은 연속해서 나오지 않는 경우의 수를 구한다.	21점

6. 2024학년도 수시모집 논술고사 예시답안

(1) 앞면을 H, 뒷면을 T라고 하자. 아래와 같이 앞면이 나온 동전 16개를 먼저 배열하고 첫 번째 H의 앞, 이웃한 두 H의 사이, 16번째 H의 뒤에 17개의 O표시를 하자.

$$\mathrm{O\ H\ O\ H} \cdots \mathrm{O\ H\ O}$$

뒷면이 연속해서 나오지 않으려면 T는 O자리에 하나씩만 나올 수 있으므로 뒷면이 연속해서 나오지 않는 경우의 수는 ${}_{17}\mathrm{C}_3=680$ 이다.

(2) 첫 번째 뒷면이 나오기 전에 나온 앞면의 수를 x_1, 첫 번째 뒷면과 두 번째 뒷면 사이에 나온 앞면의 수를 x_2, 두 번째 뒷면과 세 번째 뒷면 사이에 나온 앞면의 수를 x_3, 세 번째 뒷면 후에 나온 앞면의 수를 x_4라 하면 $x_1+x_2+x_3+x_4=16$이고,

$$x_1\,\mathrm{T}\,x_2\,\mathrm{T}\,x_3\,\mathrm{T}\,x_4$$

앞면이 항상 연속해서 두 번 이상 나오면서 뒷면이 연속해서 나오지 않으려면 $x_2\geq 2, x_3\geq 2$이어야 하고, $j=1,4$에 대하여 $x_j\neq 0$이면 $x_j\geq 2$ 이어야 한다. 따라서 다음 네 가지 경우가 가능하다.

(i) $x_1=0,\ x_2, x_3, x_4\geq 2$
(ii) $x_4=0,\ x_1, x_2, x_3\geq 2$
(iii) $x_1=x_4=0,\ x_2, x_3\geq 2$
(iv) $x_1, x_2, x_3, x_4\geq 2$

<u>(i) $x_1=0,\ x_2, x_3, x_4\geq 2$ 인 경우</u>

$x_2=y_2+2, x_3=y_3+2, x_4=y_4+2$라고 하면 $y_2+y_3+y_4=10$을 만족하는 음이 아닌 정수해의 개수를 구하면 된다. 따라서 ${}_3\mathrm{H}_{10}={}_{12}\mathrm{C}_{10}=66$이다.

<u>(ii) $x_4=0,\ x_1, x_2, x_3\geq 2$ 인 경우</u>

(i)과 같은 방법으로 구하면 66이다.

(iii) $x_1 = x_4 = 0,\ x_2, x_3 \geq 2$ 인 경우

$x_2 = y_2 + 2,\ x_3 = y_3 + 2$라고 하면 $y_2 + y_3 = 12$를 만족하는 음이 아닌 정수해의 개수를 구하면 된다.
따라서 ${}_2\mathrm{H}_{12} = {}_{13}\mathrm{C}_{12} = 13$이다.

(iv) $x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 2$ 인 경우

$x_1 = y_1 + 2,\ x_2 = y_2 + 2,\ x_3 = y_3 + 2,\ x_4 = y_4 + 2$라고 하면 $y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 8$을 만족하는 음이 아닌 정수해의 개수를 구하면 된다. 따라서 ${}_4\mathrm{H}_8 = {}_{11}\mathrm{C}_8 = 165$이다.

(i)-(iv)에 의하여 앞면은 두 번 이상 연속해서 나오고 뒷면은 연속해서 나오지 않는 경우의 수는
$66 + 66 + 13 + 165 = 310$ 이다.

1. 일반정보

유형	■ 논술고사 □ 면접 및 구술고사 □ 선다형고사
전형명	논술우수자전형
해당 대학의 계열(과목) / 문항번호	(자연)계열 / (Ⅲ)문항

2. 2024학년도 수시모집 논술고사 문항 및 제시문

[제시문]

[마] 좌표공간의 두 점 $\mathrm{A}(x_1,\ y_1,\ z_1), \mathrm{B}(x_2,\ y_2,\ z_2)$에 대하여 선분 AB를 $m:n\,(m>0,\ n>0)$으로 내분하는 점 P의 좌표는

$$\left(\frac{mx_2+nx_1}{m+n},\ \frac{my_2+ny_1}{m+n},\ \frac{mz_2+nz_1}{m+n}\right)$$

[바] 평면 β 위의 도형의 넓이를 S, 이 도형의 평면 α 위로의 정사영의 넓이를 S'이라고 할 때, 두 평면 $\alpha,\ \beta$가 이루는 각의 크기를 $\theta\,(0^\circ \le \theta \le 90^\circ)$라고 하면

$$S' = S\cos\theta$$

[논제 Ⅲ] 구 $x^2+y^2+(z-1)^2=1$ 위에 두 점 $\mathrm{A}(0,\ 0,\ 2)$, $\mathrm{P}(a,\ a,\ b)$가 있다. xy평면 위의 점 Q에 대하여 점 P가 선분 AQ를 $1:4$로 내분할 때, 다음 물음에 답하시오. (단, $a,\ b$는 양수이다.)

(1) 점 P와 점 Q의 좌표를 구하고, 그 근거를 논술하시오. (10점)

(2) 점 A와 점 P가 아닌 구 위의 점 R에 대하여 삼각형 ARQ의 xy평면 위로의 정사영을 F라 하고 삼각형 ARQ와 xy평면이 이루는 각의 크기를 θ라 하자. F의 넓이가 최대가 될 때, 삼각형 ARQ의 세 변의 길이와 $\cos\theta$의 값을 구하고, 그 근거를 논술하시오. (27점)

3. 2024학년도 수시모집 논술고사출제 의도

[논제 Ⅲ]에서는 고등학교 교육과정의 공간도형과 공간좌표의 성질들을 이해하고 응용할 수 있는 논제를 출제하였다. 단순히 공식을 암기하여 해결하는 것이 아닌, 공간상의 상황을 파악하고 이를 기본적인 개념들을 이용하여 문제를 해결하는 능력을 갖추고 있는지를 평가하고자 하였다.

4. 2024학년도 수시모집 논술고사문항 해설

[논제 Ⅲ]에서는 고등학교 기하 교육과정 중 구의 방정식, 공간좌표에서의 내분점, 공간도형의 정사영 등 기본 개념을 잘 이해하고 이를 응용할 수 있는 능력을 평가하고자 하였다.

5. 2024학년도 수시모집 논술고사채점 기준

하위문항	채점 기준	배점
(1)	<5점> 점 P의 좌표를 구한다. <5점> 점 Q의 좌표를 구한다.	10점
(2)	<9점> 정사영의 넓이가 최대가 되는 상황을 설명한다. <9점> 삼각형 ARQ의 세 변의 길이를 구한다. <9점> $\cos\theta$의 값을 구한다.	27점

6. 2024학년도 수시모집 논술고사 예시답안

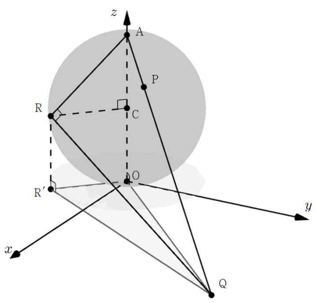
(1) 점 Q의 좌표를 $(x_1,\ y_1,\ 0)$이라 두면 점 P는 선분 AQ를 $1:4$로 내분하는 점이므로

$$\mathrm{P}\left(\frac{1\times x_1+4\times 0}{5},\ \frac{1\times y_1+4\times 0}{5},\ \frac{1\times 0+4\times 2}{5}\right)=\left(\frac{x_1}{5},\ \frac{y_1}{5},\ \frac{8}{5}\right)$$

점 P의 좌표는 $(a,\ a,\ b)$이므로, $x_1=y_1=5a$이고 $b=\frac{8}{5}$이다.

한편 점 P는 구 위의 점이므로 $a^2+a^2+(b-1)^2=1$이고 이를 풀면, $a=\frac{2\sqrt{2}}{5}$, $x_1=y_1=2\sqrt{2}$가 된다. 따라서 점 P의 좌표와 점 Q의 좌표는 각각 $\left(\frac{2\sqrt{2}}{5},\ \frac{2\sqrt{2}}{5},\ \frac{8}{5}\right)$, $(2\sqrt{2},\ 2\sqrt{2},\ 0)$이다.

(2) 아래 그림과 같이 구 위의 점 R에서 xy평면에 내린 수선의 발을 R$'$이라 하면,



삼각형 ARQ의 xy평면 위로의 정사영 F는 삼각형 OR$'$Q이다. 이때, F의 넓이가 최대가 되려면 점 R$'$은 원 $x^2+y^2=1$ 위에 있는 점들 중 선분 OR$'$이 선분 OQ와 수직인 점이며, 점 R의 z좌표는 1이어야 한다. (그림에서와는 달리 반대편에도 R이 위치 할 수 있다.) 또한 $\overline{\mathrm{R'Q}}=\sqrt{17}$이 된다. 점 R에서 z축에 내린 수선의 발을 C라 하면,

$$\overline{\mathrm{AQ}}=\sqrt{\overline{\mathrm{AO}}^2+\overline{\mathrm{OQ}}^2}=2\sqrt{5},\ \overline{\mathrm{AR}}=\sqrt{\overline{\mathrm{AC}}^2+\overline{\mathrm{CR}}^2}=\sqrt{2},\ \overline{\mathrm{RQ}}=\sqrt{\overline{\mathrm{RR'}}^2+\overline{\mathrm{R'Q}}^2}=3\sqrt{2}$$

이때 $\overline{\mathrm{AQ}}^2=\overline{\mathrm{AR}}^2+\overline{\mathrm{RQ}}^2$이므로 삼각형 ARQ는 직각삼각형이고, 넓이는 $\frac{1}{2}\overline{\mathrm{AR}}\times\overline{\mathrm{RQ}}=3$이다. 한편 삼각형 ARQ의 xy평면 위로의 정사영의 넓이는 삼각형 OR$'$Q의 넓이 $\frac{1}{2}\overline{\mathrm{OQ}}\times\overline{\mathrm{OR'}}=2$이다. 따라서 $\cos\theta=\frac{\triangle\mathrm{OR'Q}}{\triangle\mathrm{ARQ}}=\frac{2}{3}$